الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: **جوان 2013**

الشعبة: **تسيير واقتصاد**

اختبار في مادة: **الرياضيات** — المدة: **03 سا و30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

في رف من رفوف مكتبة "ثانوية النجاح"، يوجد 150 كتاب رياضيات و 50 كتاب فلسفة، حيث 40% من كتب الرياضيات و 70% من كتب الفلسفة تخص شعبة التسيير والاقتصاد.

نختار عشوائيا من الرف كتابا واحدا.

عيّن مع التبرير، الجواب الصحيح الوحيد من بين الأجوبة المقترحة، في كل حالة من الحالات التالية:

1) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات هو:

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (جـ) $\frac{1}{150}$

2) احتمال أن يكون الكتاب المختار خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

(أ) $0,24$ (ب) $0,475$ (جـ) $0,21$

3) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

(أ) $0,15$ (ب) $0,4$ (جـ) $0,3$

4) إذا كان الكتاب المختار يخص شعبة التسيير والاقتصاد، فإنّ احتمال أن يكون كتاب رياضيات هو:

(أ) $\frac{2}{75}$ (ب) $\frac{12}{19}$ (جـ) $\frac{3}{10}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الجدول التالي يعطي تطور النسب المئوية من ميزانية إحدى الجامعات، والمخصّصة للإنفاق على البحث العلمي بين سنتي 2005 و2012:

السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
النسبة المئوية $y_i\%$	3,3	3,8	4,5	4,7	5	5,2	5,7	6,2

1) مثّل سحابة النقط $M_i\left(x_i\,;y_i\right)$ في معلم متعامد.

2) جِدْ إحداثيتي G النقطة المتوسطة لسحابة النقط، ثمّ مثّلها.

3) بيّن أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y = 0,38x + 3,09$ ، ثمّ ارسمه.

4) بفرض أنّ تغيّر النسب المئوية يبقى على هذه الوتيرة في السنوات القادمة.

أ- قدّر النسبة المئوية لإنفاق هذه الجامعة على البحث العلمي في سنة 2015.

ب- في أية سنة تصبح النسبة المئوية المتوقّعة للإنفاق على البحث العلمي لهذه الجامعة هي $9,93\%$ ؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$$ ؛ حيث a وسيط حقيقي.

1- عيّن قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n)حسابية، ثمّ احسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية.

3- عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثمّ عيّن في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

4- نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ: $u_n = 3^n + 2$ ، ثمّ بيّن أنّ:

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + 4n + 3\right).$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$. فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2- أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) تحقق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ: $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ ، ثمّ استنتج أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$ ، مقارب للمنحنى (C_f).

3- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4- مثّل بيانيا كلاًّ من (Δ) و (Δ') و (C_f).

5- احسب العدد: $\int_1^2 f(x)\,dx$ ، ثمّ فسره هندسيا.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$.

1) أ- احسب الحدود: u_1، u_2، u_3 و u_4.

ب- هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$؟ برّر إجابتك.

2) أ- بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$.

ب- استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n = u_n - 4$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

جـ) اكتب v_n، ثمّ u_n بدلالة n.

د) بيّن أن (u_n) متقاربة.

3) باستعمال عبارة u_n، تأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

وُضِعت أسئلة امتحان شفوي في علبتين متماثلتين A و B. العلبة A تحتوي على 4 أسئلة في الثقافة العامة، و 6 أسئلة في مادة الاختصاص؛ والعلبة B تحتوي على 3 أسئلة في الثقافة العامة، و 7 أسئلة في مادة الاختصاص. (عمليات سحب الأسئلة واختيار إحدى العلبتين متساوية الاحتمال)

1) يختار مترشح إحدى العلبتين ليسحب منها عشوائيا، سؤالا واحدا.

أ- شكّل شجرة الاحتمالات المتوازنة.

ب- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة A؟

جـ- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة B؟

د- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص؟

هـ- علما أن المترشح سحب سؤالا في الثقافة العامة، ما احتمال أن يكون من العلبة B؟

2) مترشح آخر يسحب عشوائيا سؤالا واحدا من العلبة A وسؤالا واحدا من العلبة B.

بيّن أن احتمال سحب سؤالين في مادة الاختصاص هو $0,42$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الجدول التالي يعطي تطور عدد مستعملي الهاتف النقال في مدينة ما من سنة 2006 إلى سنة 2012:

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7
عدد المستعملين y_i	21400	32400	48000	75600	121200	207000	280000

1) أ- مثّل سحابة النقط $M_i(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد (نأخذ على محور الفواصل $1cm$ لكل سنة وعلى محور التراتيب $1cm$ لكل 20000 مستعمل).

ب- هل يمكن تسوية سحابة النقط السابقة بتعديل خطي؟ برّر إجابتك.

2) بوضع: $z_i = \ln y_i$ من أجل $i \in \{1;2;3;4;5;6;7\}$. (تدوّر النتائج إلى 10^{-2})

أ- أنقل الجدول التالي على ورقة الإجابة، ثمّ أكمله:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

ب- مثّل سحابة النقط $M'_i(x_i\,;z_i)$ في معلم متعامد آخر مبدؤه $O'(0;9)$ وبوحدة $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $5cm$ لكل وحدة على محور التراتيب.

جـ- جِدْ إحداثيتي G النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M'_i(x_i\,;z_i)$.

د- بيّن أنّ معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i\,;\,z_i)$ هي: $z = 0,44x + 9,51$.

3) أ- تحقق أنّ: $y = k\,e^{0,44x}$ ، حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه. (تدوّر النتيجة إلى الوحدة)

ب- بفرض أنّ عدد مستعملي الهاتف النقال بهذه المدينة يتزايد بنفس الوتيرة، قدر عددهم سنة 2014.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدالة العددية g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \dfrac{-x^2 + x + 2}{x^2}$.

1) عيّن، تبعا لقيم x ، إشارة $g(x)$.

2) أ- تحقق أنه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g(x) = -1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$.

ب- استنتج الدوال الأصلية للدالة g على $]0;+\infty[$.

II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0;8[$ كما يلي: $f(x) = 3 - x - \dfrac{2}{x} + \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- تحقق أن f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0;8[$ والتي تنعدم عند 1 .

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;8[$.

جـ- احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

د- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين، أحدهما α ، حيث: $3,8 < \alpha < 3,9$.

3) مثّل بيانيا (C_f) .

III) الدالة العددية h معرفة على $\left]-\dfrac{2}{3};2\right]$ كما يلي: $h(x) = f(3x+2)$.

1) بيّن أنّه إذا كان $-\dfrac{2}{3} < x \le 0$ فإنّ $0 < 3x + 2 \le 2$ وإذا كان $0 \le x \le 2$ فإنّ $2 \le 3x + 2 \le 8$.

2) احسب $h'(x)$. (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

3) شكّل جدول تغيرات h .

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (04 نقط)		
السؤال 1 – الجواب أ – التبرير: $p_1=\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$	1	04
السؤال 2 – الجواب ب – التبرير: $p_2=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{7}{10}=0,475$	1	
السؤال 3 – الجواب حـ – التبرير: $p_3=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=0,3$	1	
السؤال 4 – الجواب ب – التبرير: $p_4=\frac{0,3}{\frac{19}{40}}=\frac{12}{19}$	1	
التمرين الثاني: (04 نقط)		04
1) تمثيل سحابة النقط	1	
2) $G(4,5\ ;\ 4,8)$ ، تمثيلها	3×0.25	
3) $a=\frac{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-\overline{x}\,\overline{y}}{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i^2-\overline{x}^2}=0,38$ ، $b=\overline{y}-a\overline{x}=3,09$ ($y=0,38x+3,09$)	0.75+0.25	
رسم المستقيم	0.25	
4) أ) $x=11$ (رتبة 2015) ومنه $y=7,27$ ، النسبة المئوية 7,27%	0.5	
ب) $y=9,93$ نجد $x=18$ أي سنة 2022	0.5	
التمرين الثالث: (05 نقط)		05
1) من $u_{n+1}=u_n=3$ نجد $a=\frac{5}{2}$	0.5	
2) (u_n) حسابية معناه $\frac{2a+1}{3}=1$ ومنه $a=1$ ، $u_n=3-2n$ ، $S_1=n(4-n)$	0.5×3	
3) (u_n) هندسية معناه $2a+4=0$ ومنه $a=-2$ ، $u_{50}=3(-1)^{50}=3$ ، $S_2=\frac{3}{2}\left[1-(-1)^{50}\right]=0$	0.5×3	
4) لما $n=0$ لدينا $u_0=3=3^0+2$ ، نفرض $u_n=3^n+2$ ونبرهن $u_{n+1}=3^{n+1}+2$		
$u_{n+1}=3(3^n+2)-4=3^{n+1}+2$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n=3^n+2$ ..	1	
$u_0+u_1+u_2+...+u_n=(1+3^1+3^2+...+3^n)+2(n+1)$		
$=\frac{3^{n+1}-1}{2}+2n+2=\frac{1}{2}(3^{n+1}+4n+3)$	0.5	

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
		التمرين الرابع: (07 نقط)
	0.25×3	1) أ) $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = +\infty$ ، $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب ....
	0.25×2	ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ....
	0.5	2) أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-1)] = 0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ......
	0.5	ب) التحقق $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ ....
	0.5	$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x-2)] = 0$ ومنه (Δ') مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ....
	0.5+0.75	3) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$ وإشارته ....
07	0.5	الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$ ومتناقصة على كل من المجالين $[-\ln 2; 0[$ و $]0; \ln 2]$ ....
	0.25	جدول التغيرات ....
	1	4) الرسم ....
	1	
		(5
	0.25	$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}\right) dx$$ $$= \left[x^2 - 2x + \ln(e^x - 1)\right]_1^2 = 1 + \ln(e+1)$$
		هندسيا هو مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$ ، $x = 2$ ، و $y = 0$

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (04 نقط)		04
1) أ- $u_1=3$ ، $u_2=\frac{9}{2}$ ، $u_3=\frac{15}{4}$ ، $u_4=\frac{33}{8}$	4×0.25	
ب- (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$ لأن مثلا الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ليست مرتبة	0.5	
2) أ) $u_{n+1}-4=-\frac{1}{2}(u_n-4)$	0.5	
ب) $v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و $v_0=2$	3×0.25	
جـ) $v_n=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ، $u_n=4+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	2×0.25	
د) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$ ومنه (u_n) متقاربة	0.25	
3) $u_{n+1}-u_n=-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ، إشارته ليست ثابتة فالمتتالية غير رتيبة	2×0.25	
التمرين الثاني: (05 نقط)		05
1) أ) الشجرة المتوازنة..	1	
ب) $p(s\cap A)=p(A).p_A(s)=0,5\times0,6=0,3$	0.75	
جـ) $p(s\cap B)=p(B).p_B(s)=0,5\times0,7=0,35$	0.75	
د) $p(s)=p(s\cap A)+p(s\cap B)=0,65$	0.75	
هـ) $p_{\bar{s}}(B)=\frac{p(B\cap\bar{s})}{p(\bar{s})}=\frac{0,5\times0,3}{1-0,65}=\frac{3}{7}$	1	
2) $p_1=0,6$ ، $p_2=0,7$ ومنه $p=0,6\times0,7=0,42$ .... (p_1 احتمال سحب سؤال في الاختصاص من A و p_2 احتمال سحب سؤال في الاختصاص من B والحادثتان مستقلتان)	0.75	
التمرين الثالث: (04 نقط)		04
1) أ- تمثيل سحابة النقط	0.5	
ب-لا يمكن تسويتها بتعديل خطي لأن السحابة ليس لها شكلا متطاولا	0.25	
2) أ) (الجدول أدناه)	0.5	
ب) تمثيل السحابة $M'_i(x_i\,;z_i)$	0.5	
جـ) $G(4;11.27)$	2×0.25	
د) المعادلة $z=0,44x+9,51$	0.75	
3) أ) $y=e^z$ ومنه $y=e^{9,55}\times e^{0,44x}$. $k=13494$	2×0.25	
ب) رتبة سنة 2014 هي $x=9$ ومنه $y=707859$	2×0.25	

جدول السؤال 2) أ):

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	9.97	10.39	10.78	11.23	11.71	12.24	12.54

<table dir="rtl">
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموع</th></tr>
<tr><td><u>التمرين الرابع</u>: (07 نقط)
I) 1) إشارة $g(x)$:
$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline g(x) & \| & + & 0 & - & \end{array}$ ....</td><td>4×0.25</td><td rowspan="17">07</td></tr>
<tr><td>2) أ) $g(x)=-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>ب) $G(x)=-x-\frac{2}{x}+\ln x+c$ ، $c\in\mathbb{R}$ ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>II) 1) أ) $f'(x)=g(x)$ و $f(1)=0$ ....</td><td>0.5+0.25</td></tr>
<tr><td>ب) f متزايدة تماما على $]0;2]$ ومتناقصة تماما على $[2;8]$ ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>جـ) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=-\infty$ ومنه $x=0$ معادلة مستقيم مقارب ....</td><td>2×0.25</td></tr>
<tr><td>د) جدول التغيرات $f(8)=-\frac{21}{4}+3\ln 2$ ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2) لدينا $f(1)=0$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$f(3,8)=0,008$ ، $f(3,9)=-0,05$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3) تمثيل المنحنى (C_f) ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>III) 1) إذا كانت $-\frac{2}{3}<x\leq 0$ فإن $0<3x+2\leq 2$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>إذا كانت $0<x\leq 2$ فإن $2<3x+2\leq 8$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>2) $h'(x)=3f'(3x+2)$ ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3) جدول تغيرات h :
$\begin{array}{c|ccccc} x & -\frac{2}{3} & & 0 & & 2 \\ \hline h'(x) & \| & + & 0 & - & \\ \hline h(x) & \| -\infty & \nearrow & \ln 2 & \searrow & -\frac{21}{4}+3\ln 2 \end{array}$</td><td>0.75</td></tr>
</table>